

تفاوت تحلیل خطی و غیر خطی

مهندس کامیار باقری نژاد - کارشناس ارشد سازه

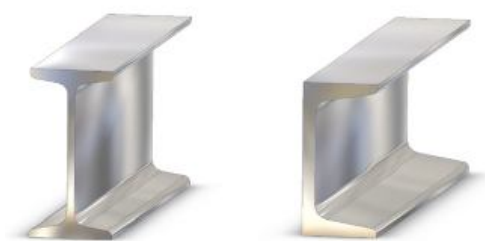
E-mail: info@ksoft.ir

چکیده

تفاوت تحلیل خطی و غیر خطی

واژه « سختی¹ » اصلی ترین تفاوت بین تحلیل خطی و غیر خطی را تعریف میکند. سختی یکی از مشخصه های عضو یا سازه میباشد که رفتار آن را نسبت به بار های وارده مشخص میکند. مواردی که بر روی سختی اثر گذارند شامل:

1- شکل²: یک تیر I شکل سختی متفاوتی از یک تیر U شکل دارد.



شکل 1: اشکال مختلف مقاطع

2- جنس³: یک تیر آلومینیومی سختی کمتری از یک تیر فولادی هم اندازه خود دارد.



شکل 2: جنس های مختلف مواد

3- تکیه گاه⁴: یک تیر با تکیه گاه در یک انتهای خود سختی کمتر و تغییر شکل بیشتری نسبت

در این یادداشت تفاوت تحلیل خطی و غیر خطی شرح داده شده است و مفهوم تحلیل غیر خطی درک خواهد شد. همچنین فواید انتخاب روش تحلیل مناسب بیان میگردد و شرح داده خواهد شد که عدم لحاظ نمودن آنالیز غیر خطی خطاهای جدی را در طراحی منجر خواهد شد و بیان میگردد که تحلیل غیر خطی چگونه به طراحی سازه های بهینه تر خواهد انجامید.

مقدمه

در طول دهه های گذشته تحلیل به روش اجزای محدود از یک ابزار صرفا تحلیلی وارد دنیای عملی طراحی های مهندسی شده است. نرم افزار های کامپیوتری با قابلیت تحلیل به روش اجزای محدود مجهز شده اند و مهندسان طراح به طور گسترده از روش اجزای محدود در مراحل طراحی خود استفاده میکنند [1].

هرچند اخیرا بیشتر نرم افزار های تحلیلی مورد استفاده مهندسان به روش تحلیل خطی بودند، تحلیل خطی تقریب قابل قبولی از ویژگی ها و رفتار حقیقی بیشتر مسائل مهندسی ارائه میدهد ولی در برخی موارد که باعث رفتار غیر خطی میگردند چالش های بزرگی بوجود می آید.

از نظر تاریخی مهندسان به علت وجود فرمول های پیچیده و زمان طولانی حل مسائل غیر خطی به استفاده از روش های تحلیل غیر خطی تمایلی نشان نمیدادند [2] ، اما امروزه به علت وجود نرم افزار های با قابلیت تحلیل غیر خطی به روش اجزای محدود با محیط کاربری آسان این رویکرد دچار تحول شده است. بعلاوه روش های توسعه یافته حل مسائل و کامپیوتر های قدرتمند زمان حل مسائل را بسیار کاهش داده است [3]. در یک دهه گذشته مهندسان روش اجزای محدود را به عنوان یک

¹ Stiffness

² Shape

³ Material

⁴ Support

$$[F] = [K] \times [d]$$

که در آن $[F]$ بردار معلوم نیروها در نقاط، $[K]$ ماتریس معلوم سختی و $[d]$ بردار مجهول تغییر مکان نقاط میباشند.

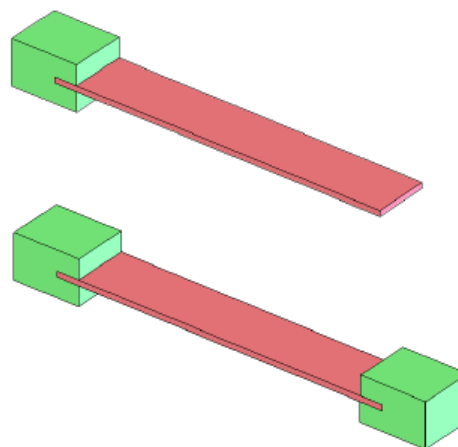
این معادله ماتریسی رفتار مدل در تحلیل به روش اجزای محدود را شرح میدهد. این رابطه شامل تعداد زیادی معادله جبری خطی میباشد و به نسبت ابعاد مدل ممکن است از چند هزار تا چند میلیون متغیر داشته باشد. ماتریس سختی $[K]$ به شکل هندسی مدل، خواص فیزیکی مواد تشکیل دهنده مدل و مهارها و تکیه گاه های آن بستگی دارد. برای تحلیل خطی فرض میگردد که سختی مدل هرگز تغییر نمیکند، سپس این معادله ها با فرض ثابت بودن ماتریس سختی تشکیل داده میشوند و در حالی که مدل تغییر شکل میدهد، بدون نیاز به بروز رسانی و تغییر هیچ پارامتری تنها یکبار حل میگردند. بنابراین تحلیل خطی مسیری مستقیم از فرمول های مسئله و حل آنها را دنبال میکند. این امر باعث میگردد که حل معادلات و رسیدن به جواب حتی برای مدل های خیلی بزرگ چند ثانیه و یا چند دقیقه طول بکشد.

ولی به محض ورود به دنیای تحلیل غیر خطی همه چیز فرق میکند، زیرا تحلیل غیر خطی اجازه فرض سختی ثابت در طول مراحل تغییر شکل را به مهندس نمیدهد. در عوض سختی در طی مراحل تغییر شکل، تغییر میکند و ماتریس سختی $[K]$ باید در هنگام مراحل حل مسائل پویا باشد و تغییر کند. این تکرار باعث افزایش زمان تحلیل و دست یابی به نتایج حقیقی تحلیل مدل میگردد.

انواع مختلف تحلیل غیر خطی

هر چند مراحل تغییر سختی امری متداول در تمامی انواع تحلیل غیرخطی میباشد، منشا رفتار غیرخطی میتواند متفاوت باشد. این امر باعث میگردد که تحلیل غیرخطی براساس منشا رفتار غیرخطی طبقه بندی گردد. بنابراین نمیتوانیم یک نوع رفتار غیرخطی را برای تمامی مسائل در نظر بگیریم و براساس نوع مدل ممکن

به تیری با همان اندازه و جنس ولی با دو تکیه گاه در انتها دارد.



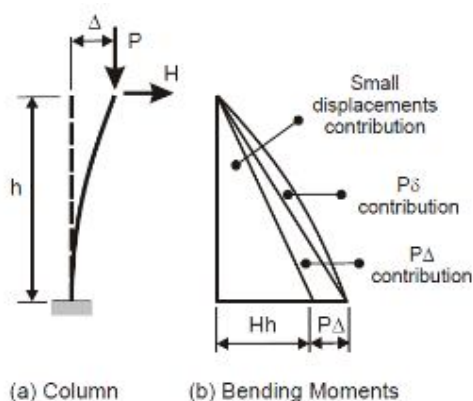
شکل 3: شرایط تکیه گاهی متفاوت

هنگامی که یک سازه در برابر بار وارده تغییر شکل میدهد به علت یک یا چند عامل معرفی شده در بالا سختی آن تغییر میکند. به عنوان مثال اگر تغییر شکل خیلی زیاد باشد عامل شکل میتواند تغییر کند و اگر مقاومت مواد به حد نهای خود برسند، عامل خواص مواد تغییر خواهد کرد.

از طرف دیگر اگر تغییر در سختی به اندازه قابل توجهی کم باشد، این امکان وجود دارد که بتوان فرض کرد که شکل و جنس در طول مراحل تغییر مکان ثابت بمانند. این فرض مهم ترین اصل در تحلیل خطی میباشد.

بدین معنی که در تمام مراحل تغییر شکل، مدل آنالیز شده دارای همان سختی میباشد که مدل اولیه پیش از اعمال بار داشت. در تحلیل خطی صرفنظر از اینکه مدل چه مقدار تغییر شکل داشته باشد، یا اینکه بار به صورت مرحله ای یا ناگهانی اعمال گردد و یا اینکه تنش بسیار زیادی به علت بار وارده در اعضای سازه به وجود آید، مدل همواره سختی اولیه خود را در طول مراحل تحلیل حفظ خواهد کرد. این فرض به مقدار بسیار زیادی فرمول ها و حل مسائل مربوطه را ساده میکند.

اساسی ترین معادله تحلیل به روش اجزای محدود را در نظر بگیرید:



شکل 4: اثر $P-\Delta$ در ستون

همانطور که در شکل 4 مشاهده میکنید، اثر $P-\Delta$ شامل بار بزرگ خارجی بر روی تغییر مکان های کوچک میباشد. اگر تغییر شکل ها بسیار بزرگ گردند که موجب برهم خوردن روابط خطی گردند، «آنالیز تغییر مکان های بزرگ»⁷ ضروری میگردد. در تئوری خطی فرض میشود که تغییر مکان ها کوچک هستند و کل بار وارده در یک مرحله برای تحلیل اعمال میگردد. روش تغییر شکل های بزرگ هنگامی که تغییر شکل ایجاد شده باعث تغییر چشمگیر در سختی سازه گردند و در توانایی سازه برای تحمل بار ها تغییر ایجاد کنند مورد نیاز است. در حل به روش تغییر شکل های کوچک فرض میگردد که سختی در طول اعمال بار تغییر نمیکند ولی در تغییر شکل های بزرگ فرض میگردد که سختی در طول اعمال بار تغییر میکند، بنابراین بار ها به تدریج در مراحل مختلف اعمال میگردد و سختی برای هر مرحله از مراحل تحلیل به روز رسانی میگردد.

است چند رفتار غیر خطی به طور همزمان در مدل بروز کند.

غیرخطی هندسی⁵

همانگونه که شرح داده شد، هنگامی که سختی مدل بر اساس عوامل خارجی تغییر میکند، تحلیل غیر خطی ضروری میباشد. اگر تغییر در سختی به علت تغییر در شکل مدل باشد، رفتار غیرخطی به عنوان غیرخطی هندسی تعریف میگردد.

در برخی از نرم افزار های تحلیلی به روش اجزای محدود، تحلیل هایی با عنوان «تحلیل تغییر شکل های بزرگ»⁶ نیز به عنوان تحلیل غیر خطی هندسی نامیده میشوند ولی باید توجه کرد که این نوع تحلیل ضرورت استفاده از تحلیل غیر خطی برای تغییر شکل های کوچک را در نظر نمیگیرد. یکی از روش هایی که برای تحلیل غیرخطی هندسی در سازه ها میتوان استفاده کرد، در نظر گرفتن اثر $P-\Delta$ میباشد.

اثر $P-\Delta$:

اثر $P-\Delta$ که به عنوان «غیر خطی هندسی» نیز شناخته میشود به علت اعمال بار در حالت تغییر شکل یافته یک سیستم سازه ای و تغییر در معادله تعادل سازه به وجود می آید. به طور خاص میتوان گفت که $P-\Delta$ به علت وجود بار های ثقلی در سازه های چند طبقه ای که تغییر مکان جانبی یافته اند ایجاد میشود. این شرایط باعث افزایش تغییر مکان جانبی طبقات میگردد.

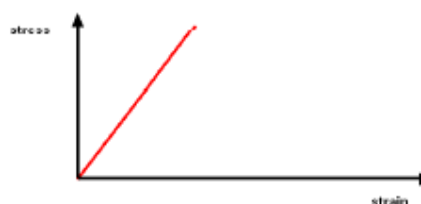
⁵ Nonlinear geometry

⁶ Large deformation analysis

⁷ Large displacement analysis

مواد غیر خطی⁸

اگر تغییر در سختی به علت تغییر در خواص مواد تحت شرایط بارگذاری خارجی رخ دهد، تحلیل غیر خطی مواد مطرح میگردد. مطابق شکل ۵ در تحلیل خطی فرض میگردد که رابطه تنش و کرنش مواد خطی است و تنش متناسب با کرنش تغییر میکند.



شکل 5: منحنی تنش کرنش خطی

این بدان معنی است که فرض شده است اگر بار زیادی وارد گردد تنش زیاد و تغییر شکل زیادی رخ خواهد داد و این تغییرات متناسب با نیروی اعمال شده است. همچنین فرض میکند که هیچ تغییر شکل دائمی رخ نخواهد داد و به محض برداشتن بار اعمال شده مدل همیشه به شکل اولیه خود باز خواهد گشت.

هرچند این فرضیه مورد قبول است، ولی اگر بارهای وارده آنقدر بزرگ باشند که تغییر شکل دائمی ایجاد کنند (مانند حالتی که در اکثر مواد پلاستیک اتفاق می افتد)، و یا هنگامی که کرنش ایجاد شده خیلی زیاد شود (همانگونه که در لاستیک و مواد کشسان رخ میدهد)، مدل غیرخطی مواد باید در نظر گرفته شود.

مواد مختلف رفتار متفاوتی را در ناحیه غیرخطی از خود نشان میدهند. تکنیک های تحلیل به روش اجزای محدود متفاوتی نیز برای در نظر گرفتن حالت غیرخطی مواد و شبیه سازی رفتار آنها مورد استفاده قرار میگیرند. در جدول 1 مناسبترین تکنیک های تحلیل غیرخطی برای مواد الاستوپلاستیک⁹ که عمده ترین مواد سازه ای میباشند پیشنهاد شده است:

نوع مدل پیشنهادی	موارد استفاده
Von Misses یا Tresca	این مدل برای مواردی مناسب است که منحنی تنش-کرنش پیش از رسیدن به تنش نهایی، ناحیه ای بدون تغییر و یا با تغییرات کوچک را نشان دهد. بیشتر مواد مهندسی با این روش، خصوصیاتشان قابل تعریف است.
Druckr-Prager	این مدل برای خاک و مواد دانه ای مناسب است.

جدول 1: تکنیک های تحلیل غیرخطی برای مواد

الاستوپلاستیک

شکل ۶ منحنی تنش-کرنش برای مواد الاستوپلاستیک (الاستیک-کاملاً پلاستیک¹⁰) را نشان میدهد. بر اساس این نوع مدل برای مواد، مقدار تنش حداکثر، از محدودیت تنش پلاستیک (تنش تسلیم) نمیتواند تجاوز کند.



شکل 6: منحنی تنش کرنش مواد الاستیک-کاملاً

پلاستیک

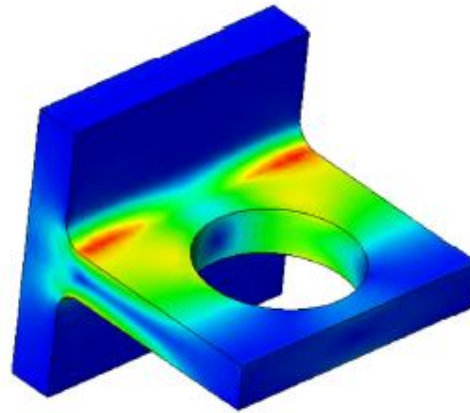
در تحلیل مواد الاستیک-کاملاً پلاستیک باید توجه کرد که این مواد پس از ورود به محدوده پلاستیک توانایی بازگشت به شکل اولیه را ندارند و در مقادیر کرنش بالاتر از کرنشی مشخص، تنش ثابت باقی می ماند.

⁸ Nonlinear material

⁹ Elastoplastic

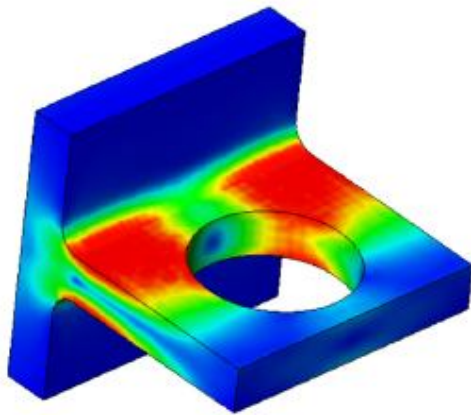
¹⁰ Elastic-Perfectly Plastic

شکل 7 یک براکت¹¹ آلومینیومی را نشان می‌دهد. بیشترین تنش موجود در تحلیل خطی براکت 44 مگاپاسکال می‌گردد و این حقیقت که آلومینیوم در 28 مگاپاسکال جاری می‌شود را نادیده گرفته است.



شکل 7: تحلیل خطی براکت آلومینیومی سوراخ دار
تنشی بیش از محدوده تنش تسلیم مواد تشکیل دهنده آنرا نشان می‌دهد

تحلیل غیرخطی می‌تواند نشان دهد که اگر تنش موجود بیش از 28 مگاپاسکال شد، مواد وارد محدوده تنش تسلیم می‌شوند. همانگونه که در شکل 8 مشاهده می‌شود، تحلیل غیرخطی نشان می‌دهد که براکت به خرابی بسیار نزدیک است. محدوده پلاستیک تقریباً تمام مقطع قسمت طره را فرا گرفته است و اندکی افزایش در مقدار بار وارد باعث می‌گردد که مقطع کاملاً پلاستیک شود و باعث تشکیل مفصل پلاستیک¹² گردد که باعث متلاشی شدن براکت می‌گردد.



شکل 8: تحلیل غیرخطی تنشی بیش از تنش تسلیم را در براکت نشان نمی‌دهد. گستردگی ناحیه پلاستیک نشان می‌دهد که ایجاد مفصل پلاستیک در براکت بسیار نزدیک است. نیروی وارده در مرز ظرفیت باربری براکت است
البته قضاوت مهندسی برای اینکه تصمیم گرفته شود که طرح صورت گرفته مورد قبول است یا خیر ضروری می‌باشد.

کمانش¹³

سختی در اعضا به علت بار وارده نیز تغییر می‌کند. بعضی وقت‌ها، نیروها بسته به اینکه چگونه اعمال می‌شوند می‌توانند باعث افزایش سختی (نیروهای کششی) و یا کاهش آن (بارهای فشاری) گردند. به عنوان مثال، یک طناب کشیده شده می‌تواند وزن یک آکروبات باز را تحمل کند، در حالی که شل شدن طناب باعث افتادن او می‌گردد. در مورد نیروهای فشاری، اگر تغییر در سختی آنقدر کافی باشد که باعث رسیدن سختی سازه به صفر گردد، کمانش رخ خواهد داد و سازه دچار تغییر شکل سریع می‌گردد. این کمانش ممکن است باعث سقوط سازه گردد و یا ایجاد سختی جدید در مرحله پس از کمانش نماید.

¹¹ Bracket

¹² Plastic hinge

¹³ Buckling

سقوط، لرزش یک موتور، برخورد ها و زلزله همگی نیاز به تحلیل دینامیکی دارند.

ولی تحلیل دینامیکی خطی است یا غیرخطی؟ قوانین موجود دقیقاً همانند قوانین موجود در تحلیل استاتیکی میباشند.

اگر سختی مدل بر اثر بار های وارده تغییر چندانی نداشته باشد، تحلیل دینامیکی خطی کفایت میکند. ولی در مسائلی که تغییر مکان های بزرگ (هندسه غیر خطی) و یا کرنش های بزرگ (مواد غیر خطی) رخ میدهد به تحلیل دینامیکی غیرخطی نیاز است.

دلایل استفاده از تحلیل غیرخطی

طبیعت غیرخطی است این به این معنی است که تحلیل خطی تنها میتواند رفتار واقعی غیرخطی سازه ها را تخمین بزند. گاهی چنین تخمین هایی میتواند مورد قبول باشد و از تحلیل خطی دیدی مناسب نسبت به مشخصات و رفتار سازه بدست آورد. ولی در بیشتر موارد فرضیات خطی تفاوت بسیار زیادی با واقعیت دارند و اطلاعات غلطی به ما میدهند.

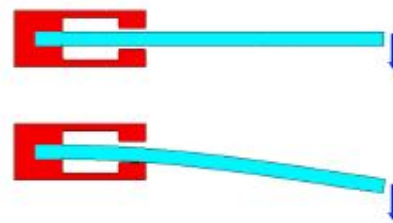
استفاده از نتایج تحلیل خطی برای تصمیم گیری اینکه آیا یک عضو بر اثر بار وارده دچار خرابی میگردد یا خیر ممکن است موجب طرحی غیر اقتصادی گردد. به عنوان مثال، در طراحی یک براکت که به روش خطی تحلیل شده است، طراح باید به این نکته توجه کند که تنش موجود نباید از تنش تسلیم تجاوز کند ولی تحلیل غیرخطی ممکن است نشان دهد که بعضی از تنش های تسلیم میتوانند موجب خرابی نگردند و مورد قبول باشند. در اینگونه موارد میتوان در ابعاد صرفه جویی کرد و هزینه ها را کاهش داد، بدون اینکه مجبور باشیم درستی عملکرد سازه را به خطر اندازیم.

تحلیل خطی کمانش میتواند برای محاسبه نیرویی که بر اثر آن سازه دچار کمانش میگردد استفاده شود (بار اویلر¹⁴). با اینحال نتیجه حاصل از تحلیل خطی کمانش همیشه دقیق نیست. به علاوه ایده آل سازی سازه ها در تحلیل به روش اجزای محدود ممکن است باعث شود که نتایج پیش بینی شده برای بار کمانش بسیار بیشتر از مقداری گردد که در سازه واقعی رخ میدهد. بنابر این نتایج حاصل از تحلیل خطی کمانش باید محتاطانه استفاده گردند.

کمانش لزوماً معادل خرابی شدید در سازه نیست و ممکن است سازه پس از وقوع کمانش نیز قادر به تحمل بار باشد. تحلیل غیر خطی میتواند رفتار پس از کمانش را شرح دهد.

تکیه گاه غیر خطی¹⁵.

اگر شرایط تکیه گاه در طول اعمال بار تغییر کند، تحلیل غیر خطی برای تکیه گاه ها مورد نیاز است. شکل 9 مثالی از تکیه گاه غیرخطی میباشد. طول مائل تیر و سختی حاصله بستگی به مقدار تغییر شکل تیر دارد. هنگامی که تیر با تکیه گاه تماس پیدا میکند، به علت کاهش طول مائل تیر، سختی افزایش پیدا میکند.



شکل 9: این تکیه گاه هنگامی که فعال گردد باعث تغییر طول مائل تیر میگردد. در نتیجه سختی تیر تغییر میکند و حل آن نیاز به تحلیل غیر خطی دارد.

تحلیل دینامیکی غیرخطی

تحلیل دینامیکی هنگام وجود اثرات اینرسی، میرایی و نیروهای وابسته به زمان مورد نیاز است. آزمایش

¹⁴ Euler load

¹⁵ Nonlinear support

نتیجه گیری

رفتار غیرخطی در سازه ها میتواند به علت تغییر در رفتار هندسه سازه و یا رفتار مواد سازه به وجود آید. سختی اصلی ترین تفاوت بین تحلیل خطی و غیرخطی را تعریف میکنند. سختی یکی از ویژگیهای عضو یا سازه میباشد که رفتار آن عضو و یا سازه را نسبت به بارهای اعمال شده نشان میدهد. سه عامل اصلی روی سختی تاثیر گذارند: شکل، جنس و شرایط تکیه گاهی.

منابع:

1. Takahashi, Y., and Fenves, G. L. _2006_. "Software framework for distributed experimental-computational simulation of structural systems." Earthquake Eng. Struct. Dyn., 35_3_, 267–291.
2. Mallet, R. H., and Marcal, P. V., "Finite Element Analysis of Nonlinear Structures," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. 9, Sep., 1968, pp.2081-2105.
3. Thai HT, Kim SE." Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic analysis of space steel structures". Advances in Engineering Software 2009; 40(9):786–97.